ACTIVITÉ EXPÉRIMENTALE Les lois de Kepler

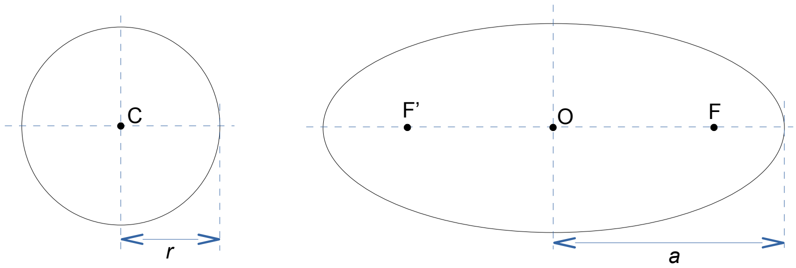
La question de la nature des orbites des planètes s'est posée dès l'Antiquité ; il a fallu attendre Johannes Kepler (1571 – 1630) pour en avoir une vision juste car basée sur des observations précises.
Il énonce alors ses trois lois, sans les démontrer, qui lui permettent de prévoir avec une grande précision la position des différentes planètes.
Le but de l'activité est de vérifier ces trois lois, à l'aide d'un langage de programmation (Python) et de données d'observation.

1ère loi : les orbites des planètes sont des ellipses dont le Soleil occupe un des foyers

Les orbites des planètes autour du Soleil ne sont donc pas des cercles, mais des ellipses.

- un cercle est caractérisé par son centre C et son rayon *r*
- une ellipse est caractérisée par son centre O, son demi-grand axe *a*, et ses deux foyers F et F'.
  On appelle *excentricité* de l'ellipse le rapport :
  $e = OF / a$.

La position de la planète au plus proche du Soleil s'appelle *périhélie*, la position la plus lointaine *aphélie*.



A l'aide d'un programme Python et de données issues d'éphémérides planétaires, vous allez tracer l'orbite de planètes du système solaire.
Ces données sont issues du site de l'IMCCE (= *Institut de mécanique céleste et de calcul des éphémérides -www.imcce.fr*). Chaque fichier contient les valeurs des coordonnées *x* et *y* (*en U.A = unités astronomiques, voir définition dans le tableau ci-dessous*) des planètes dans un repère appelé *International Celestial Reference Frame (ICRF)* à différentes dates (séparées de **1 jour** terrestre).

- téléchargez dans votre répertoire personnel le script Python `premiere_loi_kepler.py`
- téléchargez également, *dans le même répertoire que le script*, les fichiers de données au format .csv
- ouvrir le logiciel Idle (`V:\WinPython-64bit-3.6.6.1` puis lancer : `IDLE(PythonGUI).exe`)
- ouvrir dans Idle le script Python (`File > Open...`)
- le fichier est pour l'instant paramétré pour tracer la trajectoire de Mercure : lancer le script pour observer le tracé de l'orbite.

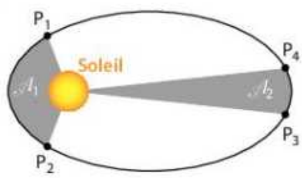
Questions :

1. Dans quel référentiel considéré comme galiléen est représentée cette orbite ?
2. Agrandir la fenêtre de la figure tracée.
   Déterminer les coordonnées du Soleil, de l'aphélie et du périhélie de l'orbite de Mercure (*les coordonnées de la position de la souris sur la figure s'affichent en haut à droite de la fenêtre*)
   En déduire la valeur du demi-grand axe *a* et de l'excentricité *e* de l'orbite
3. Modifier le script pour exploiter les données relatives à l'orbite de Mars puis de la Terre, et faire le même travail qu'à la question 2.
4. Les caractéristiques des orbites des planètes du système solaire sont données dans le tableau ci-contre
   - compléter le tableau avec les valeurs du demi-grand axe et de l'excentricité de la Terre, de Mercure et de Mars.
   - pour la majorité des planètes, comment est l'excentricité de leur orbite ?
   - que peut-on alors dire de la nature de leur trajectoire ?

Planète	*a* (U.A.)	*T* (an)	*e*
Mercure		0,240	
Vénus	0,723	0,615	0,007
Terre		1,00	
Mars		1,88	
Jupiter	5,20	11,9	0,048
Saturne	9,54	29,4	0,054
Uranus	19,2	84,0	0,046
Neptune	30,0	165	0,010
U.A. = unité astronomique = distance moyenne entre le Terre et le Soleil (soit environ 150 x 10^6 km)			

2ème loi : le segment de droite reliant le Soleil à une planète balaye des aires égales pendant des intervalles de temps égaux

On appelle A_1 et A_2 les aires balayées par le segment de droite joignant le Soleil aux planètes durant les intervalles de temps Δt_1 et Δt_2.
D'après la deuxième loi de Kepler (= loi des aires), si les durées de parcours sont identiques (Δt_1 et Δt_2), alors $A_1 = A_2$.

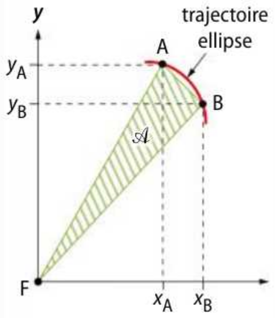


Vous allez vérifier cette loi dans le cas non pas d'une planète, mais d'un astre en orbite autour du Soleil avec une orbite très elliptique : la comète de Halley.
L'orbite de cette comète a une période de révolution de 76,09 années ; son excentricité est de 0,967, et la valeur de son demi-grand axe est 17,83 UA.
Le fichier de données utilisé donne les coordonnées de la comète dans l'ICRF pour des dates séparées de **1 mois**.

- téléchargez dans votre répertoire personnel le script Python `deuxieme_loi_kepler.py` ainsi que le fichier de données `Halley.csv`
- ouvrir le script dans Idle.

- Vous allez vous servir d'une approximation pour calculer l'aire balayée par le segment de droite Soleil-Comète, qui impose que les durées $\Delta t_1 = t_2 - t_1$ et $\Delta t_2 = t_4 - t_3$ soit *petites* :

Pour calculer l'aire balayée, on estime l'aire d'un triangle. Cette approximation reste correcte si les instants considérés sont proches.



L'aire du triangle $\mathcal{A}$ est calculée en utilisant le demi-périmètre :

$$p = \frac{AF + AB + FB}{2}$$

et la formule de Héron telle que :

$$\mathcal{A} = \sqrt{p(p - AF)(p - AB)(p - FB)}$$

avec AF, AB et FB les longueurs du triangle.

- repérez dans le script les lignes où sont déjà faits les calculs des distance entre les points P_i et le Soleil, ainsi que les distances P_iP_{i+1}
- entrez à la suite de ces lignes les instructions permettant de calculer le demi-périmètre pour chaque aire balayée (`p1` et `p2`).
- entrez de même les instructions permettant de calculer `A1` et `A2` en fonction de `p1` et `p2` et des distances calculées.
- repérez maintenant dans le script les lignes qui permettent de fixer les dates correspondant aux positions P_1, P_2, P_3 et P_4 de la comète. *Ces dates doivent être exprimées comme l'indice de la position de la comète sur son orbite : pour la comète, cet indice va de 0 à 4000.*
  Donnez à ces dates des valeurs en cohérence avec la deuxième loi de Kepler, et en tenant compte des limitations de l'approximation utilisée pour le calcul des aires.
  Les positions P_1P_2 d'une part et P_3P_4 d'autre part devront être suffisamment éloignées sur l'orbite.
- lancez ensuite le script : les valeurs des aires doivent s'afficher dans la console Python.

Questions :

1. Vérifie-t-on la deuxième loi de Kepler ? Si ce n'est pas le cas, vérifiez vos instructions de calculs, ou ajustez les valeurs des dates !
2. Que peut-on dire de la distance parcourue par la planète sur chaque portion de trajectoire P_1P_2 et P_3P_4 ? Quelle conséquence cela a-t-il pour la vitesse de la comète sur son orbite ?
3. Cherchez les dates où la comète est à son *aphélie* et à son *périhélie*, et relancer le script. Que peut-on dire de la vitesse de la comète en ces deux points ?

Modifiez le script pour utiliser à présent les données de Mercure, puis de la Terre. Modifiez les dates pour tenir compte du fait que chaque position est séparées de la suivante de **1 jour**.

4. La deuxième loi de Kepler est-elle applicable à tous les astres ?
5. Dans le cas où l'orbite est pratiquement circulaire, que peut-on alors dire du mouvement de l'astre ?

3ème loi : le carré de la période de révolution d'une planète est proportionnelle au cube du demi-grand axe de son orbite.

Vous allez vérifier cette loi en exploitant dans un premier temps les données relatives aux planètes du système solaire (*tableau de la première partie de cet énoncé*), puis en exploitant celles relatives aux satellites de la planète Jupiter.
L'objectif sera d'utiliser ces données pour tracer une courbe qui confirmera la proportionnalité évoquée.

- téléchargez dans votre zone personnelle le script `troisieme_loi_kepler.py`, et ouvrez-le dans Idle.
- repérez dans le script les lignes qui font le calcul des grandeurs `x` et `y` qui seront utilisée pour tracer la courbe ; déterminer les instructions de calcul à utiliser pour calculer les valeurs en abscisses et en ordonnées de la courbe.
- lancer alors le script : vérifie-t-on la 3ème loi de Kepler ?
- Modifiez le script pour l'utiliser avec les valeurs relatives aux satellites naturels de Jupiter :

Satellite	a (× 10^3 km)	T (jour)
Amalthée	181	0,498
Thébé	221	0,674
Io	421	1,769
Europe	671	3,551
Ganymède	1 070	7,155
Callisto	1 882	16,689

- La 3ème loi de Kepler est-elle applicable à tous les astres ?
- Donner une relation mathématique qui traduit cette loi. De quoi dépend la constante qui intervient dans cette relation ?
- Dans le cas où l'orbite est assimilable à un cercle, que devient la relation précédente ?

Problème en bonus : on montre que la constante qui intervient dans l'expression mathématique de la 3ème loi de Kepler est égale à :

$\frac{4\pi^2}{G.M}$ *avec : G = constante de gravitation universelle (6,67 × 10^{-11} S.I.), et M = masse de l'astre central (kg)*

→ à l'aide d'un tracé de courbe dans un tableur et de la détermination de son équation, exploiter la 3ème loi de Kepler pour déterminer :

- la masse du Soleil
- la masse de Jupiter